Prosiding Seminar Nasional MIPA 2016
"Peran Penelitian Ilmu Dasar dalam Menunjang Pembangunan Berkelanjutan"
Jatinangor, 27-28 Oktober 2016
ISBN 978-602-72216-1-1

Pembuktian Sifat Suatu Relasi pada Ruang *Quasi Pseudometric*

Badrulfalah*, Iin Irianingsih, Khafsah Joebaedi

Departemen Matematika FMIPA Universitas Padjadjaran[1]
*E-mail: badrulfalah@gmail.com

Abstrak

Pada ruang *quasi pseudometric* dikenal istilah relasi $\varkappa - equivalent$ yang menghubungkan duabarisan Cauchy-K kanan. Di sisi lain, terdapat banyak sifat dari relasi, di antaranya refleksif, simetris, dantransitif. Pada makalah ini dibahas tentang pembuktian ketiga sifat tersebut yang dipenuhi olehrelasi $\varkappa - equivalent$. Pembuktiannya, menggunakan konsep ke-*consequence*-an antar dua barisan. Hasilnya adalah relasi terkait merupakan relasi ekuivalen. Selain itu juga akan diberikan contoh sebagai ilustrasi.

Kata kunci: Quasi pseudo metric, K-equivalent, relasiekuivalen, consequence, barisan K-Cauchykiridankanan.

1. Pendahuluan

Relasi merupakan salah satu konsep matematika untuk mengkaitkan antar elemen dalam satu himpunan atau antar elemen dari dua himpunan yang berbeda. Relasi pada sebuah himpunan dapat digunakan untuk membentuk himpunan baru dengan elemen-elemennya memiliki kesamaaan sifat. Himpunan demikian dapat dihasilkan oleh suatu relasi yang memenuhi sifat tertentu. Selain pada himpunan, relasi juga dapat didefinisikan pada ruang metrik. Ada beberapa kajian tentang relasi pada berbagai ruang metrik, di antaranya adalah relasi pada ruang pseudo metrik dan relasi pada ruang quasi pseudo metrik.

Relasi pada ruang pseudo metrik adalah relasi yang diinduksi oleh pseudo metrik ,bersifat relasi ekivalen. Himpunan yang terbentuk adalah berupa partisi yang merupakan himpunan tutup. Kegunaannya seperti telah dikenal luas salah satunya adalah untuk membuktikan bahwa ruang pseudo metrik tidak bersifat Hausdorff. Ruang quasi pseudo metrik sendiri adalah sebuah ruang hasil reduksi sifat simetri pada ruang pseudo metrik. Ketidaksimetrisan dari quasi pseudo metrik memberi beberapa gagasan mengenai definisi barisan Cauchy yang berbeda dengan definisi barisan Cauchy pada ruang metrik biasa. Pada ruang qausi pseudo metrik diantaranya dikenal istilah barisan Cauchy-K kiri dan Cauchy-K kanan. Aspek kajian yang berkaitan dengan ruang qausi pseudo metrik adalah hubungan ke- Cauchy-an dan kekonvergenannya [4]. Pada [1] dibahas tentang aspek kelengkapan dan diberikan definisi dua barisan di ruang quasi pseudo metrik berelasi secara $\varkappa - equivalent$. Berdasarkan hasil tersebut pada makalah ini akan dikaji aspek lain yang terkait dengan definisi relasi $\varkappa - equivalent$ yaitu tentang pembuktian sifat-sifat yang dimilikinya.

2. Metode

Untuk membuktikan sifat relasi $\varkappa - equivalent$ pada ruang quasi pseudo metrik dilakukan langkah-langkah berikut:

Pertama diberikan definisi cosequence dua barisan pada ruang quasi pseudo metrik.

Selanjutnya didefinisikan sebuah relasi $\varkappa - equivalent$ pada ruang quasi pseudo metrik.

Terakhir dengan bantuan ke cosequence-an dua barisan diperiksa bahwa relasi K-equivalent yang didefinisikan pada koleksi barisan Cauchy pada ruang quasi pseudo metrik memenuhi sifat refleksif, simetris dan transitif.

3. Hasil dan Pembahasan

Ruang metrik adalah sebuah himpunan tak kosong dan dilengkapi oleh suatu metrik. Definisinya diberikan pada definisi 3.1 berikut.

Definisi 3.1: Ruang metrik (X, d) adalah $X \neq \emptyset$ beserta fungsi $d: X \times X \to \mathbb{R}$ yang memenuhi:

i. $d(x, y) \geq 0$
ii. $d(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$
iii. $d(x, y) = d(y, x)$
iv. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.[2]

Sebelum diberikan definisi ruang quasi pseudo metrik lebih dulu diberikan definisi ruang pseudo metrik. Ruang pseudo metrik yaituruang hasil reduksi ruang metrik, di mana dua titik berlainan dapat berjarak nol.

Definisinya diberikan pada definisi 3.2 berikut.

Definisi 3.2 : Ruang pseudo metrik (X, d) adalah $X \neq \emptyset$ beserta fungsi $d: X \times X \to \mathbb{R}$ yang memenuhi:

i. $d(x, y) \geq 0$
ii. $d(x, x) = 0$
iii. $d(x, y) = d(y, x)$
iv. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$. [3]

Prosiding Seminar Nasional MIPA 2016
"Peran Penelitian Ilmu Dasar dalam Menunjang Pembangunan Berkelanjutan"
Jatinangor, 27-28 Oktober 2016
ISBN 978-602-72216-1-1

Ruang quasi pseudo metrik sendiri adalah ruang hasil reduksi syarat iii pada definisi 3.2. Secara formal definisinya diberikan pada definisi 3.3 berikut.

Definisi 3.3: Ruang quasi pseudo metrik (X,p) adalah $X \neq \emptyset$ beserta fungsi $p: X \times X \to \mathbb{R}$ yang memenuhi:
i. $p(x,y) \geq 0$
ii. $p(x,x) = 0$
iii. $p(x,y) \leq p(x,z) + p(z,y)$.[1]

Sebagai ilustrasi diberikan contoh ruang quasi pseudo metrik pada contoh 3.4.

Contoh 3.4 :[4]Pandang (X,p) di mana $X = (0,1)$ dan p didefinisikan oleh

$$p(x,y) = \begin{cases} x - y \; jika \; x \geq y, \\ 1 \qquad jika \; x < y. \end{cases}$$

Maka (X,p) adalah ruang quasi pseudo metrik.

Jelas sifat (i),(ii),(iv) dari definisi 3.2 dipenuhi tetapi sifat (iii) tidak. Hal ini dapat ditunjukkan dengan memilih $x = \frac{1}{2}$ dan $y = \frac{1}{4}$ maka $p(x,y) = p\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$ tetapi $p(y,x) = p\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right) = 1$. Dengan kata lain $p(x,y) \neq p(y,x)$. Berdasarkan definisi 3.3 maka p adalah quasi pseudo metrik.

Mengingat setiap metrik menginduksi sebuah topologi maka ruang pseudo metrik adalah ruang topologi yaitu topologi yang diinduksi oleh suatu bola buka. Definisi bola buka pada ruang quasi pseudo metrik diberikan pada definisi 3.5 berikut.

Definisi 3.5: Misal (X,p) ruang quasi pseudo metrik dan $x \in X$. Bola buka berpusat pada x dan berjari-jari ε dinotasikan $B(x,p,\varepsilon)$ didefinisikan oleh $B(x,p,\varepsilon) = \{y \in X | d(x,y) < \varepsilon\}$. [4]

Untuk membuktikan sifat relasi yang didefinisikan pada ruang quasi pseudo metrik berikut ini diberikan sifat-sifat relasi pada definisi 3.6 berikut.

Definisi 3.6: Misal $S \neq \emptyset$ dan ρ relasi pada S. Relasi ρ disebut relasi ekuivalen pada S jika memenuhi:
i. ρ refleksif yaitu $(x,x) \in \rho$ untuk setiap $x \in S$.
ii. ρ simetris yaitu jika $(x,y) \in \rho$ maka $(y,x) \in \rho$ untuk $x,y \in S$
iii. ρ transitif yaitu jika (x,y) dan $(y,z) \in \rho$ maka $(x,z) \in \rho$ untuk $x,y,z \in S$.[5]

Selanjutnya pada definisi 3.7 dan definisi 3.8 berikut diberikan definisi barisan Cauchy khusus pada ruang quasi pseudo metrik dengan konsep yang berbeda dengan barisan Cauchy di ruang metrik biasa.

Definisi 3.7: Misal (X,d) ruang quasi pseudo metrik. Barisan $(x_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ di X dikatakan Cauchy-k kanan jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$sedemikian sehingga $d(x_n, x_{n'}) < \varepsilon$ untuk setiap $n \geq n' \geq n_\varepsilon$.[1]

Definisi 3.8: Misal (X,d) ruang quasi pseudo metrik. Barisan $(x_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ di X dikatakan Cauchy-k kiri jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $d(x_n, x_{n'}) < \varepsilon$ untuk setiap $n' \geq n \geq n_\varepsilon$.[1]

Selanjutnya akan dikaji sifat suatu relasi yang didefinisikan pada suatu himpunan pada ruang quasi pseudo metrik.

Langkah 1: diberikan definisi cosequence seperti pada definisi 3.9 berikut.

Definisi 3.9: Misal (X,d) ruang quasi pseudo metrik. Dan misal $(y_\sigma)_{\sigma\epsilon\mathbb{N}}$ dan $(x_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ adalah barisan di X. $(y_\sigma)_{\sigma\epsilon\mathbb{N}}$ dikatakan Cosequence ke $(x_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\sigma_\varepsilon, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sedemikian $d(y_\sigma, x_n) < \varepsilon$ bila $\sigma \geq \sigma_\varepsilon$ dan $n \geq n_\varepsilon$.[1]

Langkah 2: Memberikan definisi dua elemen adalah $\varkappa - equivalent$ diberikan pada definisi 3.10 berikut.

Definisi 3.10: Misal (X,d) ruang quasi pseudo metrik. Barisan $(x_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ dan $(x_m)_{m\epsilon\mathbb{N}}$ di (X,d) dikatakan $\varkappa - equivalent$ jika setiap *Cosequence* Cauchy-k kiri ke $(x_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ adalah *Cosequence* Cauchy-k kiri ke $(x_m)_{m\epsilon\mathbb{N}}$, dan sebaliknya.[1]

Langkah 3: Mendefinisikan relasi $\varkappa - equivalent$ pada himpunan barisan-barisan Cauchy pada ruang quasi pseudo metrik.
Pandang (X,d) ruang quasi pseudo metrik dan R relasi pada koleksi barisan Cauchy di (X,d) yang didefinisikan oleh $((x_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}, (x_m)_{m\epsilon\mathbb{N}}) \in R$ jika dan hanya jika $((x_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}dan(x_m)_{m\epsilon\mathbb{N}})$ adalah $\varkappa - equivalent$.

Langkah terakhir: Membuktikan bahwa R adalah bersifat refleksif, simetris dan transitif.

Bukti: Bukti diberikan hanya untuk bagian (i) dan (iii).
i. Akan dibuktikan bahwa R refleksif
Ambil $(x_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ barisan Cauchy-K kanan di ruang quasi pseudo metrik (X,d) dan misal $(x_m)_{m\epsilon\mathbb{N}}$ adalah barisan Cauchy-K kiri di (X,d)
Akan ditunjukkan $(x_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ dan $(x_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}\varkappa - equivalent$ yakni $((x_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}, (x_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}) \in R$.

ISBN 978-602-72216-1-1

Ambil $(x_m)_{m\epsilon\mathbb{N}}$ adalah barisan Cauchy-K kiri di (X,d) yang cosequence ke $(x_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}(x_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$.

Ambil $\varepsilon > 0$ *sebarang*.

Karena $(x_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ barisan Cauchy-K kanan berdasarkan definisi 3.7 maka terdapat $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $d(x_n, x_{n'}) < \frac{\varepsilon}{2}$ untuk setiap $n \geq n' \geq n_{1\varepsilon}$.

Karena $(x_m)_{m\epsilon\mathbb{N}}$ adalah barisan Cauchy-K kiri berdasarkan definisi 3.8 maka terdapat $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $d(x_m, x_{m'}) < \frac{\varepsilon}{2}$ untuk setiap $m' \geq m \geq m_{1\varepsilon}$.

Karena $(x_m)_{m\epsilon\mathbb{N}}$ cosequence ke $(x_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ berdasarkan definisi 3.9 maka terdapat $n_{2\varepsilon}, m_{2\varepsilon} \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ untuk setiap $n \geq n_{2\varepsilon}$ dan $m \geq m_{2\varepsilon}$.

Pilih $n_\varepsilon = \text{maks}(n_{1\varepsilon}, n_{2\varepsilon})$ dan $m_\varepsilon = \text{maks}(m_{1\varepsilon}, m_{2\varepsilon})$ maka $d(x_m, x_{m'}) < \frac{\varepsilon}{2}$ untuk setiap $m' \geq m \geq m_\varepsilon$ dan $d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ untuk setiap $n \geq n_\varepsilon$ dan $m \geq m_\varepsilon$,

Jadi untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $m_\varepsilon, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $d(x_m, x_{m'}) < \frac{\varepsilon}{2}$ dan $d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ bila $m \geq m_\varepsilon$ dan $n \geq n_\varepsilon$.

Berdasarkan definisi 3.7 dan definisi 3.9 maka $(x_m)_{m\epsilon\mathbb{N}}$ adalah barisan Cauchy-k kiri cosequence ke $(x_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$. Berdasarkan definisi 3.10 maka $(x_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ dan $(x_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ adalah $\varkappa - equivalent$.

Berdasarkan pendefinisian R maka $((x_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}, (x_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}) \in$ R untuk setiap $(x_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ barisan Cauchy-k kanan di ruang quasi pseudo metrik (X,d).

Berdasarkan definisi 3.6 berarti R refleksif.

iii. Akan dibuktikan bahwa R transitif.

Misal $((x_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}, (x_m)_{m\epsilon\mathbb{N}})dan((x_m)_{m\epsilon\mathbb{N}}, (x_k)_{k\epsilon\mathbb{N}}) \in$ R.

Akan ditunjukkan $((x_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}, (x_k)_{k\epsilon\mathbb{N}}) \in$ R.

Karena$((x_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}, (x_m)_{m\epsilon\mathbb{N}})$ berdasarkan pendefinisian R maka $(x_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ dan $(x_m)_{m\epsilon\mathbb{N}}$ adalah $\varkappa - equivalent$.

Ambil $(y_\sigma)_{\sigma\epsilon\mathbb{N}}$ barisan Cauchy-K kiri di X Cosequence ke $(x_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$. Akan ditunjukkan $(y_\sigma)_{\sigma\epsilon\mathbb{N}}$ barisan Cauchy-K kiri di X Cosequence ke $(x_k)_{k\epsilon\mathbb{N}}$.

Ambil $\varepsilon > 0$ sebarang.

Berdasarkan definisi 3.7 maka terdapat $n_{1\varepsilon} \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $d(x_n, x_{n'}) < \frac{\varepsilon}{2}$ untuk setiap $n' \geq n \geq n_{1\varepsilon}$.

Berdasarkan definisi 3.9 maka terdapat $\sigma_{1(\varepsilon)}, n_{2\varepsilon} \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $d(y_\sigma, x_n) < \varepsilon$ bila $\sigma \geq \sigma_{1(\varepsilon)}$ dan $n \geq n_{2\varepsilon}$.

Berdasarkan definisi 3.10 maka $(y_\sigma)_{\sigma\epsilon\mathbb{N}}$ barisan Cauchy-K kiri Cosequence ke $(x_m)_{m\epsilon\mathbb{N}}$.

Berdasarkan definisi 3.9 maka terdapat $\sigma_{2(\varepsilon)}, m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $d(y_\sigma, x_m) < \varepsilon$ bila $\sigma \geq \sigma_{2(\varepsilon)}$ dan $m \geq m_\varepsilon$.

Karena $((x_m)_{m\epsilon\mathbb{N}}, (x_k)_{k\epsilon\mathbb{N}}) \in$ R berdasarkan pendefinisian R maka $(x_m)_{m\epsilon\mathbb{N}}dan(x_k)_{k\epsilon\mathbb{N}}$ adalah $\varkappa - equivalent$

Berdasarkan definisi 3.10 maka $(y_\sigma)_{\sigma\epsilon\mathbb{N}}$ barisan Cauchy-K kiri yang Cosequence ke $(x_k)_{k\epsilon\mathbb{N}}$.

Berdasarkan definisi 3.9 maka terdapat $\sigma_{3(\varepsilon)}, k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $d(y_\sigma, x_k) < \varepsilon$ bila $\sigma \geq \sigma_{3(\varepsilon)}$ dan $k \geq k_\varepsilon$.

Pilih $\sigma_\varepsilon = maks(\sigma_{1(\varepsilon)}, \sigma_{2(\varepsilon)}, \sigma_{3(\varepsilon)})$.

Maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\sigma_{1(\varepsilon)}, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $d(y_\sigma, x_n) < \varepsilon$ bila $\sigma \geq \sigma_{1(\varepsilon)}$, $n \geq n_\varepsilon$ dan $\sigma_\varepsilon, k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $d(y_\sigma, x_k) < \varepsilon$ bila $\sigma \geq \sigma_\varepsilon$ dan $k \geq k_\varepsilon$.

Berdasarkan definisi 3.9 maka $(y_\sigma)_{\sigma\epsilon\mathbb{N}}$ Cosequence ke $(x_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ juga Cosequence ke $(x_k)_{k\epsilon\mathbb{N}}$.

Ini berarti setiap barisan Cauchy-K kiri di X Cosequence ke $(x_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ adalah barisan Cauchy-K kiri di X Cosequence ke $(x_k)_{k\epsilon\mathbb{N}}$.

Untuk sebaliknya dapat dibuktikan dengan cara yang sama.

Dengan demikian berdasarkan definisi 3.10, maka $(x_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ dan $(x_k)_{k\epsilon\mathbb{N}}(x_k)_{k\epsilon\mathbb{N}}$ adalah $\varkappa - equivalent$.Berdasarkan pendefinisian R maka $((x_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}, (x_k)_{k\epsilon\mathbb{N}}) \in$ R.

Sifat (ii) dapat dibuktikan dengan cara yang sama.

Berdasarkan (i), (ii), dan (iii) menurut definisi 3.6 maka R adalah relasi ekivalen. Dengan kata lain relasi $\varkappa - equivalent$ bersifat relasi ekivalen.

Sebagai ilustrasi pada contoh 3.12 diberikan dua barisan yang Cosequence dan barisan anggota suatu kelas ekivalen dari relasi $\varkappa - equivalent$.

Contoh 3.12: Pandang (X,p) di mana $X = \mathbb{R}$ dan p didefinisikan oleh

$$p(x,y) = \begin{cases} 0 \; jik\,a\; x \leq y, \\ 1 \; jika\; x > y. \end{cases}$$

Maka (X,p) adalah ruang quasi pseudo metrik.

Jelas sifat (i),(ii),(iv) pada definisi 3.2 dipenuhi tetapi sifat (iii) tidak. Berdasarkan definisi 3.3 maka p adalah quasi pseudo metrik.

Misalkan $x_n = -\frac{1}{3} + \frac{1}{n+1}$ dan $y_m = \frac{1}{3} - \frac{1}{m+1}$, $n, m \in N$. Maka $(x_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ adalah barisan Cauchy-K kiri dan $(y_m)_{m\epsilon\mathbb{N}}$ adalah barisan Cauchy-K kanan. Selain itu $(x_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ Cosequence ke$(y_m)_{m\epsilon\mathbb{N}}$.

4. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan diperoleh kesimpulan bahwa relasi $\varkappa - equivalent$ pada koleksi barisan Cauchy di ruang quasi pseudo metrik dengan menggunakan ke-cosequence-an dua elemen barisan Cauchy memenuhi sifat refleksif, simetris, dan transitif. Dengan kata lain relasi $\varkappa - equivalent$ bersifat relasi ekivalen.

ISBN 978-602-72216-1-1

Daftar Pustaka

[1] Athanasious Andrikopoulos, A Solution to the Completion Problem for Quasi-Pseudometric Spaces, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, Volume 2013. Hindawi Publishing Corporation.

[2] Bartle, R.G. & Sherbert, D.R. (1992). Introduction to Real Analysis (2nd ed.), Wiley, America.

[3] Brown, A.L. (1970). Element of Functional Analysis, Van Nostrand Rainhold Company London.

[4] I. L. Reilly, P. V. Subrahmanyam, M. K. Vamanamurthy, (1982) Cauchy Sequences in Quasi-Pseudo-Metric Spaces, Mh. Math.93, 127-140.

[5]Rosen, Kenneth H. (1995). Discrete Mathematics and its Applications (3rd edition), McGraw-Hill, Inc.