Prosiding Seminar Nasional MIPA 2016
"Peran Penelitian Ilmu Dasar dalam Menunjang Pembangunan Berkelanjutan"
Jatinangor, 27-28 Oktober 2016
ISBN 978-602-72216-1-1

Perhitungan Rekursif Distribusi Klaim Agregate Kelas (*a*, *b*, 0)

Sukono*, Dwi Susanti, Sudradjat Supian

Departemen Matematika, FMIPA, Universitas Padjadjaran
*E-mail: sukono@unpad.ac.id

Abstrak

Dalam paper ini dikaji tentang model perhitungan rekursif distribusi klaim aggregate kelas $(a,b,0)$. Di sini kajian dimulai penurunan rumus rekursif Panjer, yang memungkinkan perhitungan rekursif dari distribusi klaim aggregate, ketika banyaknya klaim berdistribusi integer non-negatif, dan ketika distribusi banyaknya klaim termasuk dalam kelas distribusi $(a,b,0)$. Oleh karena itu, disini dimulai dengan mendifinisikan kelas distribusi. Anggota kelas $(a,b,0)$ dapat diidentifikasi dengan mempertimbangkan nilai yang mungkin untuk a dan b, sebagai berikut. Pertama, anggaplah bahwa $a+b=0$; kedua, perhatikan situasi ketika $a=0$; ketiga, dipertimbangkan situasi ketika $a>0$ dan $a\neq -b$, sehingga $a+b>0$; dan kasus terakhir untuk dipertimbangkan adalah ketika $a+b>0$ dan $a<0$. Hasilnya dapat disimpulkan bahwa pembahasan dari kelas $(a,b,0)$ dengan mempertimbangkan fungsi pembangkit probabilitas dari distribusi dalam kelas ini, dan hasil turunannya dapat diaplikasikan.

Kata Kunci: perhitungan rekursif, klaim aggregate, kelas $(a,b,0)$, berdistribusi integer non-negatif, pembangkit probabilitas.

1. Pendahuluan

Asuransi merupakan salah satu teknik untuk mengelola risiko, yang cukup banyak digunakan. Asuransi dapat dipandang sebagai alat di mana individu dapat mentransfer risiko ke pihak lainnya (pihak asuransi), di mana pihak asuransi mengakumulasi dana dari individu-individu untuk memenuhi kebutuhan keuangan yang berkaitan dengan kerugian yang timbul (Dickson, 2005; Perraudeau, 1988). Sebagai lembaga pengambil alih dan penerima risiko, perusahaan asuransi tentunya harus dapat memperhitungkan risiko jika terjadi banyak klaim, karena jika tidak, akan menimbulkan kerugian yang bisa membuat perusahaan asuransi tersebut bangkrut (Klugman, et al., 1998). Dalam pengelolaan risiko, perusahaan asuransi harus mengetahui karakter dari risiko tersebut untuk memprediksi kerugian yang akan terjadi di masa yang akan datang. Karakter risiko tersebut dapat dipelajari dalam suatu model distribusi klaim (Dhaene, et al., 2006).

Pada pemodelan kerugian klaim (*claim losses*) terdapat dua ukuran penting yang harus diperhatikan yaitu frekuensi klaim (*claim frequency*) dan besar klaim (*claim amount*). Distribusi yang tepat untuk memodelkan frekuensi klaim adalah distribusi diskrit, antara lain binomial, geometrik, negatif binomial dan Poisson (Eisele, 2006; Fackler, 2011). Distribusi-distribusi diskrit yang sudah dikenalkan sebelumnya (binomial, geometrik, binomial negatif, Poisson) dapat dikelompokkan menjadi sebuah kelas distribusi (*a*, *b*, 0). Kelas distribusi (*a*, *b*, 0) adalah kelas dua parameter, yaitu *a* dan *b*. Mengganti fungsi probabilitas untuk masing-masing Poisson, binomial, dan binomial negatif distribusi di ruas kiri rekursif, bahwa masing-masing tiga distribusi memenuhi sifat rekursif. Sifat rekursif ini menunjukkan bahwa tiga distribusi tersebut sesuai dengan karakteristik data (Hess, et al., 2011; Marfai, 2008).

Dalam paper ini dikaji tentang metode rekursif pada distribusi klaim aggregate kelas (*a*, *b*, 0). Tujuannya adalah untuk mengestimasi frekuensi kalim dalam periode waktu yang tetap, seperti dalam satu tahun. Sebagai ilustrasi numerik, dianalisis data polis asuransi mobil.

2. Model Matematika

Pada bagian ini dikaji tentang formula rekursif Panjer yang memungkinkan perhitungan rekursif dari distribusi klaim agregat ketika jumlah klaim individual berdistribusi pada bilangan bulat non-negatif, dan ketika banyaknya klaim memiliki kelas distribusi $(a,b,0)$. Oleh karena itu, dimulai dengan mendefinisikan kelas distribusi ini.

2.1 Kelas distribusi $a,b,0$

Suatu distribusi menghitung dikatakan memiliki kelas distribusi $a,b,0$ jika fungsi probabilitas $p_n \,{}_{n=0}^{\infty}$ dapat dihitung secara rekursif menggunakan persamaan

$$p_n = \left(a + \frac{b}{n}\right) p_{n-1} \qquad (1)$$

ISBN 978-602-72216-1-1

untuk $n=1,2,3,\ldots$, di mana a dan b adalah konstanta. Mulai nilai untuk perhitungan rekursif p_0 yang dianggap lebih besar dari 0, dan istilah '0' dalam $a,b,0$ digunakan untuk menunjukkan fakta ini (Dickson, 2005; Embrechts and Frei, 2010).

Ada tiga distribusi non-trivial di dalam kelas $a,b,0$, yaitu Poisson, binomial dan negatif binomial. Untuk melihat ini, perlu dicatat bahwa skema rekursi diberikan oleh persamaan (1) dimulai dari

$$p_1 = \ a+b \ \ p_0 .$$

Oleh karena itu, haruslah $a+b\geq 0$ karena jika tidak akan didapatkan nilai negatif untuk p_1. Anggota kelas $a,b,0$ dapat diidentifikasi dengan mempertimbangkan nilai yang mungkin untuk a dan b, sebagai berikut.

Pertama, misalkan bahwa $a+b=0$. Maka $p_n=0$ untuk $n=1,2,3,\ldots$, dan sebagai $\sum_{n=0}^{\infty} p_n=1$, dapat dilihat bahwa p_0 harus sama dengan 1, sehingga distribusi adalah degenerasi 0.

Kedua, perhatikan situasi ketika $a=0$. Ini memberikan $p_n = \ b/n \ \ p_{n-1}$ untuk $n=1,2,3,\ldots$ sehingga

$$p_n = \frac{b}{n}\frac{b}{n-1}\cdots\frac{b}{2}bp_0 = \frac{b^n}{n!}p_0$$

dan lagi menggunakan fakta bahwa $\sum_{n=0}^{\infty} p_n=1$, dapat diperoleh

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = p_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b^n}{n!} = p_0 e^b$$

ini memberikan $p_0=e^{-b}$. Oleh karena itu, ketika $a=0$, diperoleh distribusi Poisson dengan rataan b.

Ketiga, pertimbangkan situasi ketika $a>0$ dan $a\neq -b$, sehingga $a+b>0$. Kemudian oleh aplikasi berulang dari persamaan (1) didapatkan

$$p_n = \left(a+\frac{b}{n}\right)\left(a+\frac{b}{n-1}\right)\cdots\left(a+\frac{b}{2}\right)\ a+b\ \ p_0$$

$$= \frac{an+b \ \ a \ n-1 \ +b \ \cdots \ 2a+b \ \ a+b}{n \ \ n-1 \ \cdots 2} p_0$$

$$= \frac{a^n}{n!}\left(n+\frac{b}{a}\right)\left(n-1+\frac{b}{a}\right)\cdots\left(2+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{b}{a}\right)p_0$$

Jika sekarang ditulis α untuk $1+\frac{b}{a}$, maka diperoleh

$$p_n = \frac{a^n}{n!} \ n-1+\alpha \ \ n-2+\alpha \ \cdots \ 1+\alpha \ \ \alpha p_0 \qquad (2)$$

Untuk mengidentifikasi distribusi, perhatikan bahwa $p_0>0$, mengharuskan $\sum_{n=1}^{\infty} p_n<1$. Menggunakan uji rasio, diperoleh konvergensi mutlak jika

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{p_n}{p_{n-1}}\right|<1$$

dan sebagai $p_n=\left(a+\frac{b}{a}\right)p_{n-1}$, dimiliki konvergensi mutlak jika $|a|<1$, dan seperti yang telah diasumsikan $a>0$, kondisi ini untuk menurunkan $a<1$. Maka

$$p_0 + p_0\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha+n-1}{n}a^n=1,$$

dan dari persamaan (1), diketahui bahwa untuk $NB \ \ k,p$ fungsi probabilitas

$$p_k\sum_{n=1}^{\infty}\binom{k+n-1}{n}q^n=1-p^k$$

di mana $p+q=1$. Karenanya $p_0 = \ 1-a \ ^{\alpha}$, dan distribusi dari N adalah binomial negatif dengan parameter $1-a$, di mana $0<a<1$, dan $\alpha=1+\frac{b}{a}$ (Dicsonn, 2005; Shevchenko, 2010).

Kasus terakhir yang perlu dipertimbangkan adalah ketika $a+b>0$ dan $a<0$. Sebagai $a<0$, harus ada beberapa bilangan bulat positif κ sedemikian hingga

$$a+\frac{b}{\kappa+1}=0$$

sehingga $p_n=0$ untuk $n=\kappa+1,\kappa+2,\ldots$. Jika ini tidak benar, maka sebagai $a<0$ dan $b>0$, akan ditemukan bahwa akan ada nilai pertama n sehingga $a+\frac{b}{n}$ akan lebih kecil dari 0, menghasilkan nilai negatif untuk p_n. Melanjutkan seperti dalam kasus ketiga di atas,

$$p_n = \frac{a^n}{n!}\left(n+\frac{b}{a}\right)\left(n-1+\frac{b}{a}\right)\cdots\left(2+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{b}{a}\right)p_0$$

dan sebagai $\kappa=-\left(1+\frac{b}{a}\right)$, dapat ditulis ini sebagai

$$p_n = \frac{a^n}{n!}(-\kappa+n-1)(-\kappa+n-2)\cdots(-\kappa+1)(-\kappa)\,p_0$$
$$= (-1)^n\frac{a^n}{n!}(\kappa-n+1)(\kappa-n+2)\cdots(\kappa-1)\kappa p_0$$
$$= (-1)^n\frac{a^n}{n!}\frac{\kappa!}{(\kappa-n)!}p_0$$
$$= (-a)^n\binom{\kappa}{n}p_0 .$$

Telah diasumsikan bahwa $a<0$, jadi misalkan $A=-a>0$. Maka

$$p_0 + p_0\sum_{n=1}^{\kappa}\binom{\kappa}{n}A^n = p_0\sum_{n=0}^{\kappa}\binom{\kappa}{n}A^n = 1.$$

Untuk menemukan p_0 dapat ditulis $A=\frac{p}{(1-p)}$ yang setara dengan $p=\frac{A}{(1+A)}=\frac{a}{(a-1)}$, sehingga $0<p<1$. Maka

$$p_0\sum_{n=0}^{\kappa}\binom{\kappa}{n}p^n(1-p)^{-n}=1$$

memberikan $p_0=(1-p)^{\kappa}$, sehingga distribusi N adalah binomial dengan parameter κ dan $\frac{a}{(a-1)}$.

Tabel-1 menunjukkan nilai-nilai a dan b untuk parameterisasi distribusi (Dickson, 2005; Klugman, et al., 1998).

Tabel 1. Nilai *a* dan *b* untuk distribusi Poisson, binomial, dan negatif binomial

	a	B
$P(\lambda)$	0	λ
$B(n,q)$	$-q/(1-q)$	$(n+1)q/(1-q)$
$NB(k,p)$	$1-p$	$(1-p)(k-1)$

Dapat disimpulkan bahwa pembahasan tentang kelas $(a,b,0)$ dengan mempertimbangkan fungsi pembangkit probabilitas distribusi di kelas ini, dan menurunkan hasil yang akan diterapkan dalam perhitungan rekursif. Misalkan

$$P_N(r) = p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n p_n$$

Maka

$$P_N'(r) = \sum_{n=1}^{\infty} n r^{n-1} p_n$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} n r^{n-1}\left(a+\frac{b}{n}\right)p_{n-1}$$
$$= a\sum_{n=1}^{\infty} n r^{n-1} p_{n-1} + b\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} p_{n-1}$$
$$= a\sum_{n=1}^{\infty} n r^{n-1} p_{n-1} + bP_N(r) .$$

Menggunakan identitas trivial $n=(n-1)+1$, diperoleh

$$a\sum_{n=1}^{\infty} n r^{n-1} p_{n-1} = a\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)r^{n-1}p_{n-1} + a\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} p_{n-1}$$
$$= ar\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)r^{n-2}p_{n-1} + aP_N(r)$$
$$= arP_N'(r) + aP_N(r) .$$

Karenanya

$$P_N'(r) = arP_N'(r) + (a+b)P_N(r) . \qquad (3)$$

Persamaan diferensial ini dapat dipecahkan, tetapi solusi ini tidak dibahas dalam paper ini (Dickson, 2005; Embrechts and Frei, 2010).

2.2 Metode Analisis Data

Dalam paper ini dilakukan kajian tentang model perhitungan rekursif distribusi klaim aggregate kelas $(a,b,0)$. Kajian dimulai dengan penurunan rumus rekursif Panjer. Di sini dikaji kemungkinan perhitungan rekursif dari distribusi klaim aggregate, ketika banyaknya klaim berdistribusi integer non-negatif, dan juga ketika distribusi banyaknya klaim termasuk distribusi dalam kelas $(a,b,0)$.

Selanjutnya, metode perhitungan rekursif tersebut digunakan untuk menganalisis data frekuensi dan besarnya klaim asuransi mobil. Penggunaan metode rekursif yang bertipe Panjer untuk menghitung distribusi probabilitas dari frekuensi dan besar klaim asuransi mobil ini, karena umumnya dapat taksiran yang lebih sesuai dengan data yang ada.

3. Hasil dan Pembahasan

Dalam bagian ini dilakukan analisis tentang data banyak kecelakaan tercatat sebagai pemilik polis asuransi. Analisis dilakukan untuk melakukan perbandingan estimator distribusi Poisson dan binomial negatif. Analisis dimulai tentang data yang gunakan, dan dilanjutnya dengan estimasi distribusi Poisson dan binomial negatif.

3.1 Data

Sebagai ilustrasi numerik, perhatikan data kecelakaan dalam Tabel-1 pada kolom (a) dan kolom (b), yang diambil dari Thyrion (Effendie, 2016). Data tersebut menganalisis sebanyak 9.461 polis asuransi mobil, jumlah kecelakaan yang terkait polis dicatat dalam Tabel-1. Juga yang tercatat dalam Tabel-1 adalah nilai yang diamati dari banyaknya kecelakaan.

ISBN 978-602-72216-1-1

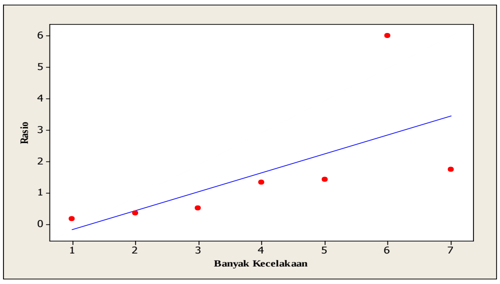
Tabel 1. Banyaknya Kecelakaan

Banyak Kecelakaan (k)	Banyak Polis (n_k)	Rasio $k(\frac{n_k}{n_{n-1}})$
(a)	(b)	(c)
0	7.840	
1	1.317	0,16798
2	239	0,36295
3	42	0,52720
4	14	1,33333
5	4	1,42857
6	4	6,00000
7	1	1,75000
8^+	0	
Jumlah	9.461	

Thyrion (Effendie, 2016)

3.2 Estimasi Distribusi

Data banyak kecelakaan yang disajikan dalam Tabel-1, ditentukan besarnya rasio yang hasilnya diberikan dalam tabel yang sama pada kolom (c). Selanjutnya plot data rasio kolom (c) terhadap banyak kecelakaan kolom (a), dan hasil plot tersebut seperti tampak dalam Gambar 1.



Gambar 1. Grafik plot Rasio terhadap Banyak Kecelakaan

Gambar 1 adalah plot nilai kuantitas yang terkait terhadap k jumlah kecelakaan. Hal ini dapat dilihat dari grafik bahwa kuantitas terkait terlihat sekitar garis lurus kecuali untuk titik di k = 6. Banyaknya k yang meningkat berkurang karena jumlah pengamatan menjadi kecil dan variabilitas hasilnya bertambah. Visual, semua titik tampaknya memiliki nilai yang sama. Namun, titik di sebelah kiri lebih dapat diandalkan daripada titik di sebelah kanan. Dari grafik, dapat dilihat bahwa kemiringan positif dan data muncul di sekitar garis lurus. Hal ini menunjukkan distribusi binomial negatif adalah model yang tepat. Apakah lereng secara signifikan berbeda dari 0, juga tidak mudah dinilai dari grafik. Oleh *rescaling* sumbu vertikal grafik, lereng dapat dibuat agar terlihat lebih curam dan karenanya lereng dapat dibuat agar grafik tampak berbeda secara signifikan dari 0. Untuk distribusi Poisson memerlukan kemiringan 0. Namun, dapat dikatakan bahwa distribusi binomial mungkin bukan pilihan yang baik, karena tidak ada bukti kemiringan negatif. Dalam hal ini disarankan agar memilih distribusi Poisson dan distribusi binomial negatif, dan kemudian bandingkan nilai relatif likelihood kedua distribusi tersebut.

Hal ini juga memungkinkan untuk membandingkan kesesuaian distribusi dengan melihat hubungan rataan dan variansi. Untuk himpunan data ini, jumlah rata-rata klaim per polis adalah 0,2144; dan variansi adalah 0,2889. Karena variansi melebihi rataan, tampaknya distribusi binomial negatif perlu dipertimbangkan sebagai alternatif, selain distribusi Poisson. Ini adalah baru dugaan kualitatif karena belum memiliki cara formal menentukan apakah variansi cukup besar dari rataan, untuk menjamin distribusi binomial negatif adalah yang lebih sesuai. Dalam rangka untuk melakukan beberapa analisis formal.

Tabel 2. Perbandingan Poisson-Binomial Negatif

Distribusi	Estimator Parameter	Negatif Log-likelihood
Poisson	$\hat{\lambda}$ =0,2143537	5.490,78
Binomial Negatif	$\hat{\beta}$ = 0,3055594 $\hat{r}$ = 0,7015122	5.348,04

Tabel 2 memberikan hasil estimasi kemungkinan maksimum (*Maximum Likelihood Estimator*) dari parameter distribusi Poisson dan distribusi binomial negatif, serta nilai dari negatif log-likelihood dalam setiap kasus. Distribusi Poisson dapat dianggap sebagai kasus khusus dari distribusi binomial negatif dengan menetapkan $r\beta = \lambda$ dan membiarkan nilai β mendekati 0. Karena distribusi Poisson adalah kasus khusus dari binomial negatif, maka bisa dibandingkan nilai log-likelihood, karena uji rasio likelihood mengharuskan peningkatan nilai log-likelihood oleh setidaknya 1,92 pada tingkat signifikansi 5%. Dari Tabel-2, dapat dilihat bahwa perubahan nilai log-likelihood oleh 142,74, kuantitas yang jauh lebih besar dari distribusi Poisson. Namun, uji kesesuaian diperoleh statistik chi-square adalah 8,77 dengan dua derajat kebebasan. Nilai *P-value* adalah 0,0125 dan jelas menunjukkan bahwa model yang lebih sesuai.

4. Kesimpulan

Dalam paper ini telah dikaji tentang model perhitungan rekursif distribusi klaim aggregate kelas $(a, b, 0)$. Berdasarkan grafik plot nilai rasio terhadap banyak kecelakaan, menunjukkan bahwa distribusi binomial negatif adalah model yang tepat. Berdasarkan grafik tersebut dianalisis distribusi Poisson dan distribusi binomial negatif, dan kemudian dibandingkan. Hasil uji rasio likelihood terlihat bahwa distribusi Poisson lebih sesuai dengan nilai *P-value* adalah 0,0125.

ISBN 978-602-72216-1-1

Ucapan Terima Kasih

Ucapan terima kasih disampaikan kepada Rektor dan Dekan FMIPA Universitas Padjadjaran, yang telah memberikan hibah program *Academic Leadership Grant* (*ALG*), di bawah koordinasi Prof. Dr. Sudradjat, M.S., yang merupakan sarana untuk peningkatan kegiatan penelitian dan publikasi bagi peneliti di Universitas Padjadjaran.

Daftar Pustaka

Dhaene, J., Ribas, C., and Vernic, R. (2006). Recursions for the Individual Risk Model. *Working Paper*. Katholieke Universiteit Leuven, Belgium and Universiteit van Amsterdam, The Netherlands.

Dickson, D.C.M. (2005). *Insurance Risk and Ruin.* Cambridge: University Press.

Eisele, K.T. (2006). Recursions for Compound Phase Distributions. *Insurance: Mathematics and Economics* 38 (2006) 149–156. www.sciencedirect.com

Effendie, A.R. (2016). *Teori Risiko Aktuaria dengan Software R.* Yogyakarta: Gajah Mada University Press.

Embrechts, P. and Frei, M. (2010). Panjer Recursion Versus Fft For Compound Distributions. *Working Paper*. 2Seminar for Statistics, ETH Zurich, 8092 Zurich, Switzerland, October, 2007; this version: July, 2010.

Fackler, M. (2011). One formula for the probabilities of the Poisson, Binomial, and Negative Binomial distribution. *Working Paper*. Este artículo se ha recibido en versión revisada el 20 de julio de 2011

Hess, K.T., Liewald, A., and Schmidt, K.D. (2011). An Extension of Panjer's Recursion. *Paper*. Lehrstuhl f¨ur Versicherungs-mathemetik, Technische Universit¨at Dresden. E–mail: schmidt@math.tu-dresden.de

Klugman, S.A., Panjer, H.H., and Willmot, G.E. (1998). *Loss Models: From Data to Decisions*. New York: John Wiley & Sons, Inc.

Marfai, M.A., King, L., Sartohadi, J., Sudrajat, S., Budiani, S.R., and Yulianto, F, (2008). The impact of tidal flooding on a coastal community in Semarang, Indonesia. *Environmentalist*, 28: p. 237-248.

Perraudeau, M., (1988). Luminance models. In *National Lighting Conference*. Cambridge, UK, March 27-30.

Shevchenko, P.V. (2010). Calculation of Aggregate Loss Distributions. The Journal of Operational Risk 5(2), pp. 3-40, 2010. www.journalofoperationalrisk.com.