



Desain Permukaan Respon dengan Faktor Kualitatif

Budhi Handoko*, Sri Winarni, Yeny Krista Franty

Departemen Statistika, FMIPA, Universitas Padjadjaran, Sumedang

*E-mail: budhi.handoko@unpad.ac.id

Abstrak

Desain permukaan respon yang biasa digunakan dalam melakukan analisis data hasil eksperimen adalah model permukaan respon orde dua dengan faktor kuantitatif. Penelitian ini akan mengkaji mengenai penambahan faktor kualitatif kedalam model permukaan respon dan menerapkan pada suatu studi kasus eksperimen. Untuk mendapatkan desain yang terbaik, akan digunakan kriteria dari desain optimal, yaitu D-optimal. Penaksiran parameter model akan dilakukan menggunakan metode kuadrat terkecil serta akan ditentukan model terbaik berdasarkan taraf faktor kualitatifnya. Berdasarkan hasil analisis terhadap studi kasus, desain optimal ditentukan menggunakan kriteria Desain D-optimal yang nilainya 61,89 menggunakan 18 percobaan. Nilai respon (skor) optimal dapat diperoleh menggunakan kombinasi faktor suhu aktual 325 derajat Fahrenheit, waktu 50 menit, dan dikerjakan oleh operator ke-2. Nilai respon yang diperoleh dengan menggunakan kombinasi ini adalah skor 32,67 dengan interval antara 27,99 dan 37,34

Kata kunci: Desain permukaan respon, Kriteria D-optimal, Pencocokan model

1. Pendahuluan

Metodologi Permukaan Respon (MPR) dalam desain eksperimen di bidang Statistika digunakan untuk menyelesaikan suatu pemodelan hubungan antara faktor-faktor percobaan dan respon itu sendiri. Tujuan dari pemodelan permukaan respon adalah untuk menentukan nilai optimal dari suatu respon. Selama ini model permukaan respon yang sering digunakan adalah model permukaan respon orde dua dengan faktor yang terlibat didalamnya kuantitatif. Permasalahan akan muncul pada saat suatu eksperimen yang melibatkan faktor kualitatif dan memerlukan analisis menggunakan MPR.

Suatu pendekatan untuk mengakomodasi masalah tersebut mulai dilakukan dengan menggunakan Desain Majemuk Pusat (DMP) atau Central Composite Design (CCD) pada setiap taraf dari faktor kualitatif. Namun demikian pendekatan ini memerlukan jumlah percobaan yang sangat banyak dan menjadi tidak praktis. Sebagai penggantinya peneliti bisa mengabaikan perbedaan antar dua jenis faktor dan menggunakan desain baku untuk taraf faktornya. Seperti yang disampaikan oleh Draper & John (1998) bahwa desain-desain baku seperti DMP tidak cocok sebab memerlukan empat sampai lima faktor yang tidak memungkinkan untuk faktor kualitatif dan hasilnya menjadi tidak berarti. Pentingnya mengikutsertakan faktor kualitatif kedalam MPR disampaikan oleh Cox (1984) dan meletakkannya sebagai salah satu dari sebelas *open problem* dalam desain eksperimen. Draper & John (1998) merupakan peneliti pertama yang berkeinginan untuk memecahkannya.

Penelitian ini akan mengkaji mengenai penambahan faktor kualitatif kedalam model menggunakan metode yang sistematis dalam desain yang ekonomis dan pembentukan model yang cocok. Hal yang penting yang diperlukan

untuk membentuk sebuah desain yang baik adalah apabila faktor kualitatif dikeluarkan dari model, harus memiliki sifat-sifat yang diinginkan dari Desain Permukaan Respon (DPR) yang baku untuk faktor kuantitatif (Box & Draper, 1987) dan (Khuri & Cornell, 1987). Oleh karena itu, dalam penelitian ini akan membentuk desain berdasarkan D-optimal dan selanjutnya melakukan pembentukan model permukaan respon yang cocok dengan data eksperimen.

2. Metode

Dalam proses untuk melakukan analisis data, bagian ini akan menguraikan metode pengumpulan data dan metode analisis data sebagai berikut.

2.1 Metode Pengumpulan Data

Data yang akan dianalisis diambil dari data sekunder yang merupakan hasil eksperimen di suatu pabrik pembuatan kain yang menguji efek dari beberapa faktor terhadap pencelupan kain katun sintetis dalam pembuatan kaos pria (Montgomery, 2012). Eksperimen ini menggunakan tiga faktor dengan level sebagai berikut:

Tabel 1. Faktor dan Tarafnya.

Faktor	Simbol	Taraf	Jenis Faktor
Suhu	X1	300-350° F	kuantitatif
Waktu	X2	40 – 60 menit	kuantitatif
Operator	X3	1,2,3	kualitatif

Respon dari eksperimen ini adalah skor dari kain yang sudah jadi yang dibandingkan dengan standar kain yang bagus. Semakin tinggi skor berarti kain yang dihasilkan akan semakin baik.

2.2 Metode Analisis Data

Data hasil eksperimen selanjutnya akan dilakukan analisis menggunakan pendekatan



desain permukaan respon yang mempertimbangkan adanya faktor kualitatif yang dalam eksperimen ini adalah operator.

Tahapan analisis data eksperimen ini dilakukan melalui serangkaian tahapan sebagai berikut:

2.2.1 Penentuan Model Permukaan Respon yang sesuai

Terdapat beberapa model yang dapat dipergunakan dalam menyelesaikan permasalahan tersebut. Model-model tersebut diuraikan sebagai berikut.

2.2.1.1 Model Permukaan Respon orde dua dengan menyertakan faktor kualitatif.

Model ini merupakan MPR orde dua dengan penambahan unsur faktor kualitatif pada bagian akhir dari model

$$Y = \beta_0 + \sum_{i=1}^3 \beta_i x_i + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=i+1}^3 \beta_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^3 \beta_{ii} x_i^2 + \sum_{i=1}^2 \delta_i s_i \quad (1)$$

dengan:

- Y = variabel respon
- β_i = parameter model untuk faktor kuantitatif
- x_i = faktor kuantitatif pertama taraf ke-i
- x_j = faktor kuantitatif kedua taraf ke-j
- δ_i = parameter model untuk faktor kualitatif
- s_i = faktor kualitatif taraf ke-i
- ϵ = komponen error dari model

2.2.1.2 Model Permukaan Respon orde dua dengan menyertakan faktor kualitatif dengan interaksi dengan faktor kuantitatif.

Model berikut ini menyertakan tambahan unsur berupa interaksi antara faktor kualitatif dan kuantitatif pada bagian akhir model.

$$Y = \beta_0 + \sum_{i=1}^3 \beta_i x_i + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=i+1}^3 \beta_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^3 \beta_{ii} x_i^2 + \sum_{i=1}^2 \delta_i s_i + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 \delta_{ij} s_i x_j \quad (2)$$

Keterangan dari model tersebut hampir sama dengan bagian 2.2.2.1 dengan tambahan keterangan yaitu :

- δ_{ij} = parameter model untuk interaksi faktor kualitatif taraf ke-i dengan faktor kuantitatif taraf ke-j
- $s_i x_j$ = unsur interaksi faktor kualitatif taraf ke-i dan faktor kuantitatif taraf ke-j

2.2.1.3 Model Permukaan Respon orde dua dengan taraf kualitatif dengan menyertakan interaksi penuh.

Model berikut ini merupakan model yang paling lengkap karena mempertimbangkan semua komponen interaksi. Komponen interaksi yang ditambahkan dalam model ini yaitu interaksi antara dua faktor kuantitatif dan sebuah faktor kualitatif dan unsur intraksi antara faktor kualitatif dan kuadrat dari faktor kuantitatif.

$$Y = \beta_0 + \sum_{i=1}^3 \beta_i x_i + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=i+1}^3 \beta_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^3 \beta_{ii} x_i^2 + \sum_{i=1}^2 \delta_i s_i + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 \delta_{ij} s_i x_j + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=j+1}^3 \delta_{ijk} s_i x_j x_k + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 \alpha_{ij} s_i x_j^2 + \epsilon. \quad (3)$$

Penjelasan dari model tersebut hampir sama dengan bagian 2.2.2.2 dengan tambahan keterangan yaitu :

- δ_{ijk} = parameter model untuk interaksi faktor kualitatif taraf ke-i dengan faktor kuantitatif pertama taraf ke-j dan faktor kuantitatif kedua taraf ke-k
- $s_i x_j x_k$ = unsur interaksi faktor kualitatif taraf ke-i, faktor kuantitatif pertama taraf ke-j dan faktor kuantitatif kedua taraf ke-k
- α_{ij} = parameter model untuk interaksi faktor kualitatif taraf ke-i dengan kuadrat faktor kuantitatif taraf ke-j

2.2.2 Penentuan Kriteria Desain Optimal

Dalam menyusun DPR yang dapat menghasilkan desain yang baik, digunakan kriteria penyusunan desain yang optimal. Terdapat beberapa jenis desain optimal menurut Goos & Jones (2011), yaitu D-Optimal dan I-Optimal. Penjelasan mengenai kedua desain optimal adalah sebagai berikut:

2.2.2.1 Desain D-Optimal

Huruf D berasal dari kata ‘Determinant’. Desain ini memiliki prinsip meminimumkan matriks varians-kovarians dari taksiran efek faktor. Hal ini berarti bahwa desain ini akan dapat membuat varians dan standar error yang kecil. Selain itu, desain ini menjamin bahwa semua taksiran dari efek faktor yang berbeda saling independen.

Dalam prakteknya Desain D-Optimal ini diperoleh dengan menemukan suatu desain yang meminimumkan determinan dari matriks varians-kovarians dari taksiran parameter.

Suatu desain disebut sebagai D-Optimal, jika nilai dari determinan berikut ini minimum.

$$\left| \mathbf{X}^T \mathbf{X}^{-1} \right|$$

2.2.2.2 Desain I-Optimal

Huruf I berasal dari istilah ‘Integrated Prediction Variance’. Desain ini sangat sesuai untuk digunakan apabila tujuan dari eksperimen adalah untuk menemukan pengaturan optimal dari suatu proses. Desain I-Optimal memiliki prinsip meminimumkan varians prediksi rata-rata dalam sebuah daerah eksperimen χ . Hasil dari desain ini adalah akan diperolehnya suatu prediksi yang akurat dalam mayoritas ruang lingkup eksperimen.

Dalam prakteknya I-Optimal seringkali dikenal sebagai *avarage variance prediction*.

2.2.3 Penaksiran Parameter dan Penentuan titik stationer

Penaksiran parameter model dilakukan menggunakan metode *least square*. Setelah dilakukan penaksiran parameter model selanjutnya dilakukan penentuan titik stasioner yang dilakukan dengan membentuk model orde-kedua dalam sebuah matriks.

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \mathbf{x}^T \mathbf{b} + \mathbf{x}^T \mathbf{B} \mathbf{x} \quad (4)$$

dengan

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k \end{bmatrix}$$

dan

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_{11} & \hat{\beta}_{12}/2 & \dots & \hat{\beta}_{1k}/2 \\ & \hat{\beta}_{22} & \dots & \hat{\beta}_{2k}/2 \\ & & \ddots & \vdots \\ \text{simetris} & & & \hat{\beta}_{kk} \end{bmatrix}$$

Apabila diturunkan persamaan \hat{y} terhadap elemen-elemen dari vektor \mathbf{x} dan disamadengankan nol, maka akan diperoleh

$$\frac{\partial \hat{y}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{b} + 2\mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (5)$$

Titik stasioner merupakan solusi dari persamaan (5) tersebut yaitu

$$\mathbf{x}_s = -\frac{1}{2} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} \quad (6)$$

Model prediksi untuk respon yang optimal berdasarkan titik stasioner tersebut adalah seperti pada persamaan (7) sebagai berikut:

$$y_s = \hat{\beta}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{x}_s^T \mathbf{b} \quad (7)$$

3. Hasil dan Pembahasan

Analisis dilakukan menggunakan software JMP 13.0 Trial Version, dengan membedakan perlakuan dari faktor yang sifatnya kuantitatif yaitu suhu dan waktu, sedangkan operator sebagai faktor kualitatif.

Apabila menggunakan kriteria D-optimal desain yang dalam penentuan desain permukaan respon akan menghasilkan kombinasi seperti pada Tabel 2 berikut ini.

Tabel 2. Desain Permukaan Respon Optimal

No. Percobaan	Suhu	Waktu	Operator
1	-1	-1	1
2	-1	-1	2
3	-1	-1	3
4	-1	0	2
5	-1	1	1
6	-1	1	2
7	-1	1	3
8	0	-1	2
9	0	0	1
10	0	0	3
11	0	1	2
12	1	-1	1
13	1	-1	2
14	1	-1	3
15	1	0	2
16	1	1	1
17	1	1	2
18	1	1	3

Desain optimal pada Tabel 2 didasarkan pada kriteria desain Optimal yaitu D-Optimal berikut ini.

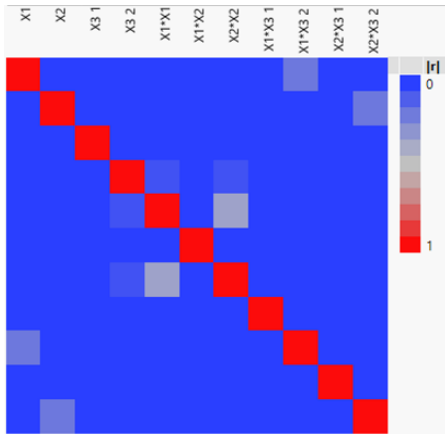
Design Diagnostics	
D Optimal Design	
D Efficiency	61,89485
G Efficiency	91,15155
A Efficiency	38,46154
Average Variance of Prediction	0,494709
Design Creation Time (seconds)	11

Gambar 1. Diagnostik Desain

Power Analysis		
Significance Level	0,05	
Anticipated RMSE	1	
Term	Anticipated Coefficient	Power
Intercept	1	0,297
X1	1	0,862
X2	1	0,862
X3 1	1	0,656
X3 2	-1	0,748
X1*X1	1	0,285
X1*X2	1	0,821
X2*X2	1	0,285
X1*X3 1	1	0,56
X1*X3 2	-1	0,641
X2*X3 1	1	0,56
X2*X3 2	-1	0,641
Apply Changes to Anticipated Coefficients		
Effect	Power	
X3	0,677	
X1*X3	0,567	
X2*X3	0,567	

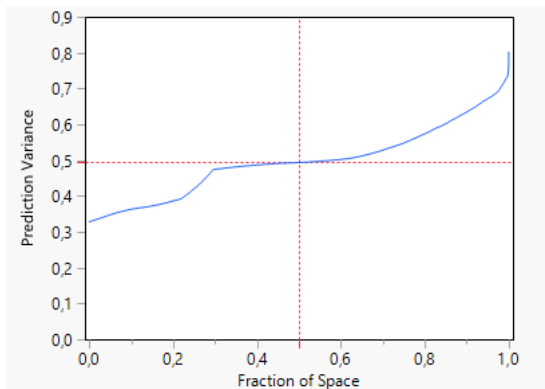
Gambar 2. Analisis Kuasa Uji

Gambar 2 menunjukkan analisis kuasa uji untuk setiap elemen pada model permukaan respon yang dibentuk. Nilai kuasa uji yang paling tinggi adalah pada faktor X_1 dan X_2 serta interaksi X_1X_2 . Nilai koefisien dapat disesuaikan pada X_3 , interaksi X_3 dengan X_1 dan X_2 untuk meningkatkan nilai kuasa ujinya.



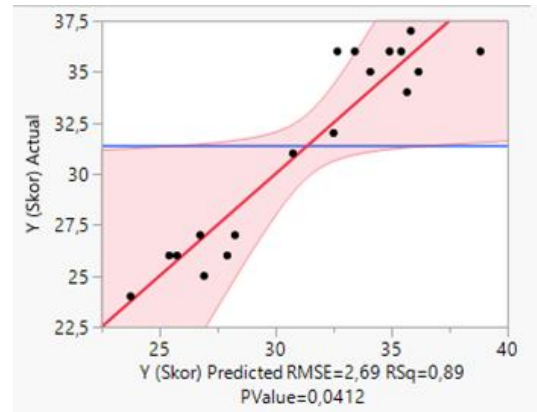
Gambar 3. Peta Warna Korelasi

Gambar 3 mengilustrasikan mengenai matriks korelasi dalam model permukaan respon yang diwujudkan dalam bentuk warna. Warna merah yang membentuk garis diagonal menunjukkan bahwa nilai korelasi pada elemen diagonal bernilai 1, dan diluar itu berwarna biru yang berarti korelasinya nol atau mendekati nol.



Gambar 4. Fraksi dari Plot Ruang Desain

Ruang Desain sama artinya dengan daerah eksperimen atau daerah desain yaitu kumpulan semua kombinasi dari level faktor yang dipertimbangkan dalam eksperimen. Grafik tersebut menunjukkan varians prediksi minimum, median, dan maksimum pada semua daerah eksperimen, yaitu pada semua kemungkinan perlakuan atau kombinasi taraf faktor. Ukurannya semakin rendah kurva akan semakin baik. Pada Gambar 4 nilai minimum adalah 0,3, nilai median 0,5 dan nilai maksimum 0,8. Berdasarkan gambar terlihat bahwa apabila fraksi desain yang diambil semakin banyak, maka nilai varians prediksinya akan semakin besar.



Gambar 5. Plot Aktual dan Prediksi

Plot antara nilai skor (Y) aktual dan nilai Y yang merupakan prediksi dari model permukaan respon yang terbentuk dapat dilihat pada Gambar 5. Nilai dari kedua skor berkisar disekitar garis merah yang berarti secara visual nilai prediksi sudah mendekati nilai aktualnya dengan nilai $RMSE = 2,69$.

Source	LogWorth	PValue
Operator	1,772	0,01690
Waktu*Waktu	1,538	0,02896
Waktu*Operator	1,366	0,04310
Suhu	0,723	0,18944
Suhu*Waktu	0,673	0,21245
Suhu*Suhu	0,460	0,34713
Waktu	0,161	0,69094
Suhu*Operator	0,072	0,84737

Gambar 6. Ringkasan Efek

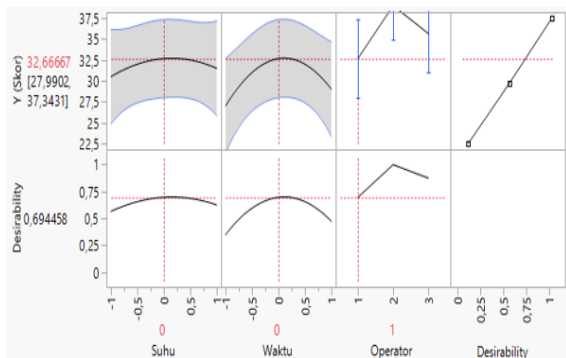
Efek dari setiap faktor dan interaksinya ditunjukkan pada Gambar 6. Terlihat bahwa nilai efek yang paling besar diberikan oleh Faktor Operator. Pada taraf alpha 5%, hanya terdapat 3 sumber variasi yang signifikan yaitu operator, kuadrat waktu dan interaksi antara waktu dan operator. Hal ini menjelaskan bahwa peranan operator sangat penting.

Setelah melalui proses penaksiran parameter model permukaan respon yang telah dispesifikasikan di awal, maka diperoleh nilai taksiran parameter seperti terlihat pada Gambar 7. Berdasarkan Gambar 7 terlihat bahwa faktor yang signifikan pada taraf alpha 5% adalah koefisien intersep, operator 1 dan 2, dan kuadrat dari waktu.

Term	Estimate	Std Error	t Ratio	Prob> t
Intercept	35,777778	1,592629	22,46	<,0001*
Suhu	1,0833333	0,732126	1,48	0,1894
Waktu	-0,305556	0,732126	-0,42	0,6909
Operator[1]	-3,111111	0,951562	-3,27	0,0170*
Operator[2]	3,2222222	0,852901	3,78	0,0092*
Suhu*Suhu	-1,666667	1,634157	-1,02	0,3471
Suhu*Waktu	-1,083333	0,776537	-1,40	0,2124
Waktu*Waktu	-4,666667	1,634157	-2,86	0,0290*
Suhu*Operator[1]	-0,583333	1,067248	-0,55	0,6044
Suhu*Operator[2]	0,416667	0,968511	0,43	0,6821
Waktu*Operator[1]	1,3055556	1,067248	1,22	0,2671
Waktu*Operator[2]	2,1388889	0,968511	2,21	0,0693

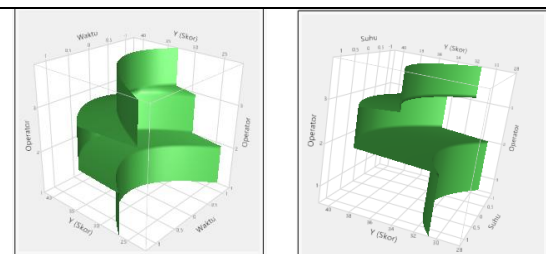
Gambar 7. Taksiran Parameter dan Pengujiannya

Gambar 8 berikut ini mendeskripsikan mengenai prediksi nilai respon pada saat level dari faktor-faktornya dilakukan penyesuaian dengan nilai yang dikehendaki. Terlihat bahwa nilai respon yang optimal diperoleh pada taraf suhu 0 atau pada suhu aktual 325 derajat Fahrenheit, pada waktu taraf 0 atau 50 menit, dan dikerjakan oleh operator ke-2. Nilai respon yang diperoleh dengan menggunakan kombinasi ini adalah skor 32,67 dengan interval antara 27,99 dan 37,34.



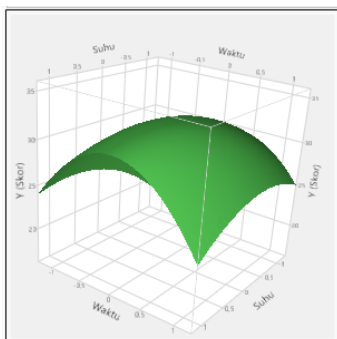
Gambar 8. Profiler Prediksi

Gambar 9 menyajikan Plot Permukaan untuk setiap kombinasi faktor terhadap nilai responnya. Pada faktor kualitatif yaitu operator memberikan pola yang sangat berbeda satu sama lain apabila dilihat dari sisi waktu maupun suhu. Kombinasi antara waktu dan suhu tertentu pada pertengahan plot akan menghasilkan nilai skor yang maksimal.



(a) Plot Permukaan antara Waktu dan Operator terhadap skor

(b) Plot Permukaan antara Suhu dan Operator terhadap skor



(c) Plot Permukaan antara Waktu dan Suhu terhadap skor

Gambar 9. Plot permukaan

4. Kesimpulan

Berdasarkan hasil analisis dan pembahasan dapat disimpulkan beberapa hal sebagai berikut:

1. Faktor kualitatif dalam model permukaan respon dibedakan perlakukannya dengan faktor kuantitatif. Adapun metode penaksiran parameternya tetap sama yaitu menggunakan Metode Least Square.
2. Desain optimal dalam contoh kasus tersebut ditentukan menggunakan Desain D-optimal yang nilainya 61,89 menggunakan 18 percobaan.
3. Nilai koefisien model permukaan respon yang signifikan yaitu intersep, operator 1 dan 2, dan kuadrat dari waktu.
4. Nilai respon (skor) optimal dapat diperoleh menggunakan kombinasi faktor suhu aktual 325 derajat Fahrenheit, waktu 50 menit, dan dikerjakan oleh operator ke-2. Nilai respon yang diperoleh dengan menggunakan kombinasi ini adalah skor 32,67 dengan interval antara 27,99 dan 37,34.

Daftar Pustaka

- Box, G., & Draper, N. (1987). *Empirical Model-Building and Response surfaces*. New York: Wiley.
- Cox, D. (1984). Present position and potential developments: some personal views: desain experiments and regression. *J. Roy. Statist. Soc.*, 306-315.
- Draper, N., & John, J. (1998). Respons-surface designs for quantitative and qualitative variables. *Technometrics*, 423-428.
- Goos, P., & Jones, B. (2011). *Optimal Design of Experiments : A Case Study Approach*. West Sussex: John Wiley & Sons.
- Khuri, A. I., & Cornell, J. A. (1987). *Response surface*. New York: Marcel Dekker.
- Montgomery, D. C. (2012). *Design and Analysis of Experiments*. Canada: John Wiley & Sons.
- Wu, C. J., & Ding, Y. (1998). Construction of response surface designs for qualitative. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 331-348.